Introducción a los Sistemas Lógicos y Digitales

EJERCICIOS RESUELTOS

T.P. Nº 2: *ÁLGEBRA DE BOOLE*

1) Demostrar las siguientes igualdades:

a) $\overline{A+B} = \overline{A}\cdot\overline{B}$

Con 2 variables A y B podemos formar 4 minitérminos cuya unión es igual a la función unidad:

$$\overline{\mathrm{A}}\cdot\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{A}\cdot\mathrm{B} + \overline{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{B} + \mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{B}} = 1$$

$$\overline{\mathrm{A}}\cdot\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{A}(\mathrm{B}+\overline{\mathrm{B}}) + \overline{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{B} = 1$$

$$\overline{\mathrm{A}}\cdot\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{A} + \overline{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{B} = 1 \qquad (1)$$

Como la unión de una variable (o una función) y su complemento también es la unidad:

$$\overline{A+B} + (A+B) = 1 \qquad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene:

$$\overline{A}\cdot\overline{B} + A + \overline{A}\cdot B = \overline{A+B} + A + B$$

Por otro postulado tenemos que: $A + \overline{A}B = A + B$

Que reemplazado en la anterior nos da: $\overline{A}\cdot\overline{B} + A + B = \overline{A+B} + A + B$

Por lo tanto, para que la igualdad se cumpla, debe ser:

$$\overline{A}\cdot\overline{B} = \overline{A+B}$$

Con lo que queda demostrado el postulado.

b) $A\cdot B + \overline{A}\cdot C + B\cdot C = \overline{\overline{A\cdot B}\cdot\overline{\overline{A}\cdot C}}$

(por De Morgan)

$$\overline{\overline{A\cdot B}\cdot\overline{\overline{A}\cdot C}} \quad = \quad \overline{\left(\overline{A}+\overline{B}\right)\left(\overline{\overline{A}}+\overline{C}\right)} \quad = \quad \overline{\left(\overline{A}+\overline{B}\right)} + \overline{\left(\overline{A}+C\right)} \quad = \quad AB + \overline{A}C \quad =$$

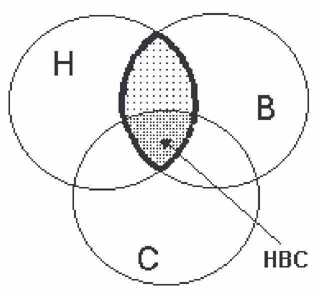
$$= \quad AB\,(1+C)+\overline{A}C\,(1+B) \quad = \quad AB + ABC + \overline{A}C + \overline{A}BC \quad =$$
$$= \quad AB + BC\left(A+\overline{A}\right)+\overline{A}C \quad = \quad A\cdot B + \overline{A}\cdot C + B\cdot C$$

2) Simplificar la siguiente función:

$$O = \overline{R + R\cdot\overline{S} + T\cdot U} \quad =$$
$$= \overline{R}\cdot\overline{R\overline{S}}\cdot\overline{TU} \quad = \quad \overline{R}\,\left(\overline{R}+\overline{\overline{S}}\right)\left(\overline{T}+\overline{U}\right) \quad =$$
$$= \left(\overline{R}\cdot\overline{R}+\overline{R}\cdot S\right)\left(\overline{T}+\overline{U}\right) \quad = \quad \overline{R}\cdot\overline{T}+\overline{R}\cdot S\cdot\overline{T}+\overline{R}\cdot\overline{U}+\overline{R}\cdot S\cdot\overline{U}$$

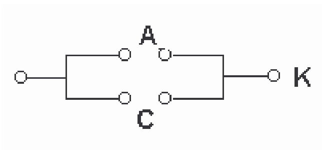
3) Demostrar usando diagrama de Venn:

a) $H\cdot B\cdot C + H\cdot B = H\cdot B$

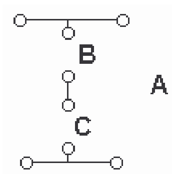


4) Esquematizar los operadores lógicos que representan a las siguientes funciones:

a) K = A + C



b) $A = \overline{B\cdot C}$



5) (Ej. 3 de la práctica)

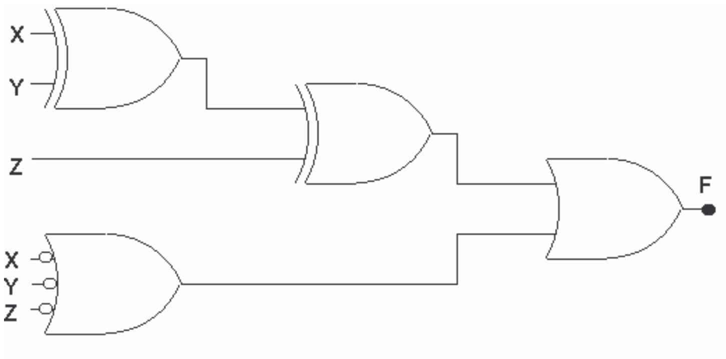
Para el primer circuito (el de los diodos) consideramos que cuando en A ó B se aplica una tensión próxima a 0 V (nivel bajo ó "cero lógico") el diodo correspondiente entra en conducción. En cambio, cuando en A ó B se aplica una tensión del orden de Vcc (nivel alto ó "uno lógico"), el diodo correspondiente no conduce. Por lo tanto, despreciando la caída en los diodos y tomando Vcc = “1” y 0 V = “0”, podemos armar la siguiente tabla de verdad:

A	**B**	**C**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

que corresponde a la función C = A . B , es decir una función AND.

6) Representar con compuertas la siguiente función:

$$F = (X \oplus Y \oplus Z) + (\overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z})$$



7) Expresar en primera y segunda forma canónicas aplicando el teorema de De Morgan:

$$H = (A + B + \overline{C}) \cdot \overline{(A + \overline{B} + C)} + \overline{C}$$

Aplicando De Morgan al segundo término:

$$\begin{aligned} H &= (A + B + \overline{C}) \cdot \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{C} = A\overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{C} + \overline{C}(B + \overline{B})(A + \overline{A}) = \\ &= 0 + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \\ &= \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \end{aligned}$$

que es la representación de H en primera forma canónica o suma de minitérminos. Como puede verse, contiene 5 minitérminos. Por lo tanto la función complementaria estará formada por los siguientes 3 minitérminos:

$$\overline{H} = ABC + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C$$

Si aplico De Morgan en ambos miembros de esta expresión queda:

$$\overline{\overline{H}} = H = \overline{ABC + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C} = \overline{ABC}\cdot\overline{A\overline{B}C}\cdot\overline{\overline{A}\,\overline{B}C}$$

$$H = (\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})\cdot(A+B+\overline{C})$$

que es la representación de H en segunda forma canónica o producto de maxitérminos.
Regla práctica: como puede verse, la 2ª forma puede obtenerse directamente de la 1ª y viceversa, escribiendo la función complementaria y transformando los minitérminos en maxitérminos o viceversa, **teniendo la precaución de negar todas las variables.**

8) Expresar las funciones en la forma canónica indicada utilizando el teorema de De Morgan:

a) $F = A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$ a segunda forma

La función complementaria de F será:

$$\overline{F} = ABC + AB\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$$

$$\overline{\overline{F}} = F = \overline{ABC + AB\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}}$$

Aplicando De Morgan:

$$F = \overline{ABC} + \overline{AB\overline{C}} + \overline{\overline{A}BC} + \overline{\overline{A}\,\overline{B}C} + \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}} + \overline{\overline{A}B\overline{C}}$$

Aplicando De Morgan nuevamente:

$$F = (\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+B+C)\cdot(A+\overline{B}+C)$$

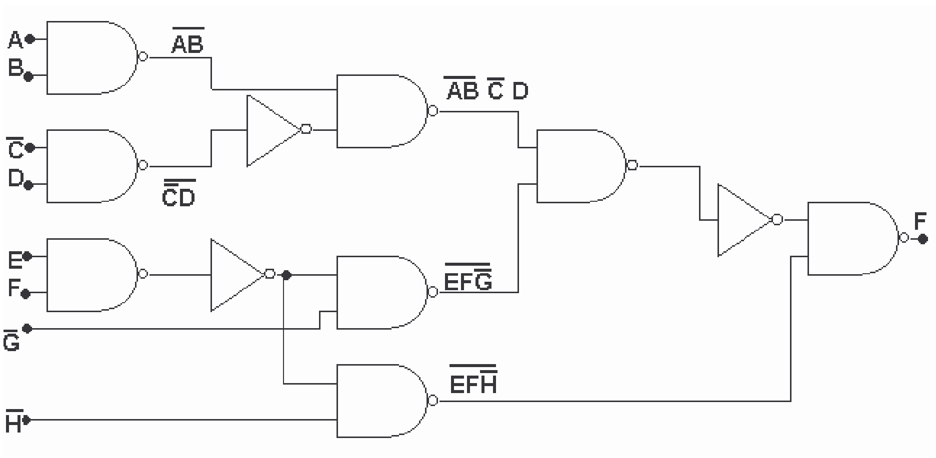
9) Representar con compuertas las siguientes funciones y encontrar un circuito equivalente usando sólo el tipo de compuertas indicado:

a) $F = AB + \overline{\overline{C}D} + (\overline{\overline{E}+\overline{F}})(\overline{G}+\overline{H})$ con chips tipo 7400 (cuádruple NAND de 2 entradas)

$$F = AB + \overline{\overline{C}} + \overline{D} + (\overline{\overline{E}}\cdot\overline{\overline{F}})(\overline{G}+\overline{H}) = AB + C + \overline{D} + EF(\overline{G}+\overline{H}) = AB + C + \overline{D} + EF\overline{G} + EF\overline{H}$$

Negando 2 veces toda la expresión y aplicando De Morgan:

$$F = \overline{\overline{AB + C + \overline{D} + EF\overline{G} + EF\overline{H}}} = \overline{\overline{AB}\cdot\overline{C}\cdot D\cdot\overline{EF\overline{G}}\cdot\overline{EF\overline{H}}}$$



Como los inversores los puedo realizar con una NAND con una entrada conectada a "1" permanentemente, necesitaré 11 NANDs, es decir 3 chips tipo7400.