

Ejercicios resueltos 4:

Compensación por adelanto

Cátedra de Control y Servomecanismos

Idea y borrador: Ing. Cristian Zujew
Corregido y ampliado por el Dr. Ing. F. Valenciaga

Objetivos: en esta guía práctica resuelta se cumplirá con ciertos requerimientos especificados para una planta cuya transferencia tiene un cero de no mínima fase.

Se busca que el compensador sintetizado sea de mínima ganancia por lo cual se aplicará para el diseño el método de la bisectriz.

Caso de estudio: se trabajará sobre la siguiente transferencia:

$$GH = \frac{-0,4 \cdot (s - 0,25)}{s \cdot (s + 2)(s + 10)}$$

Los requerimientos sobre el sistema compensado son:

1. Frecuencia natural en 2,828 rad/seg
2. Relación de amortiguamiento de 0,707
3. Tiempo de establecimiento en 2 seg (criterio del 2%)

Estas especificaciones determina que los polos de lazo cerrado se encuentren posicionados en: $-2 \pm j2$.

Realizando el lugar de raíces del sistema sin compensar (Figura 1), puede observarse que para que la traza de este lugar geométrico pase por la ubicación de los polos deseados falta agregar fase positiva. Para determinar exactamente cuanta fase debe aportar el compensador se calcula el aporte de fase del sistema sobre la ubicación deseada para los polos de lazo cerrado ($-2 \pm j2$).

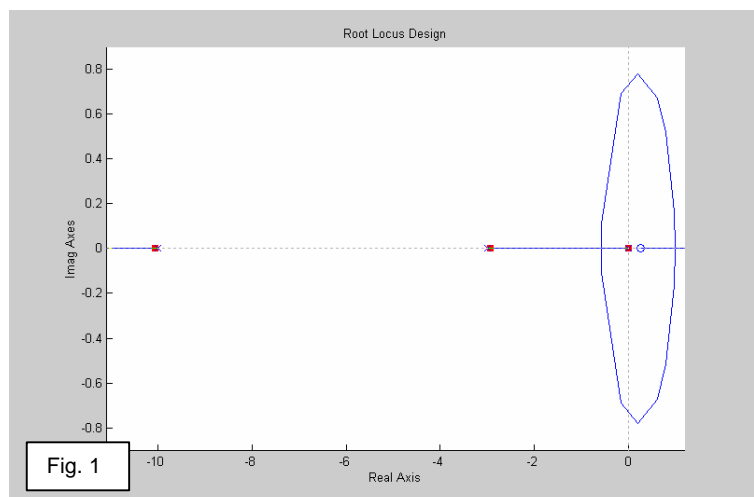


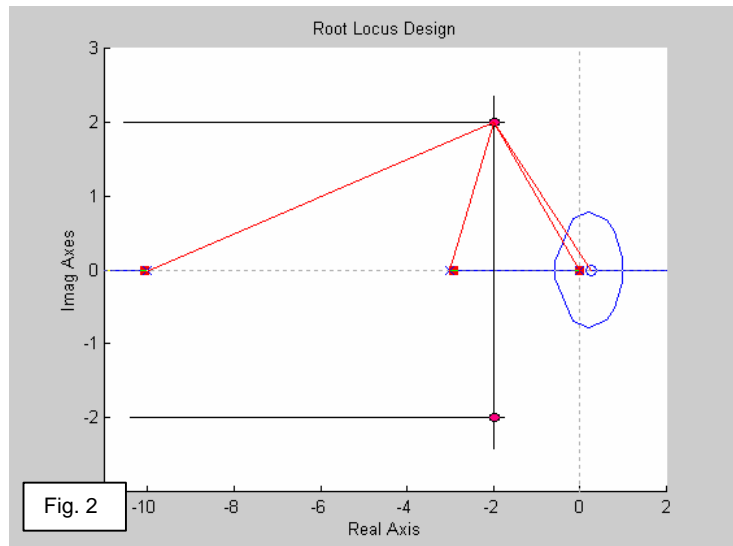
Fig. 1

En base a la figura 2 se obtiene:

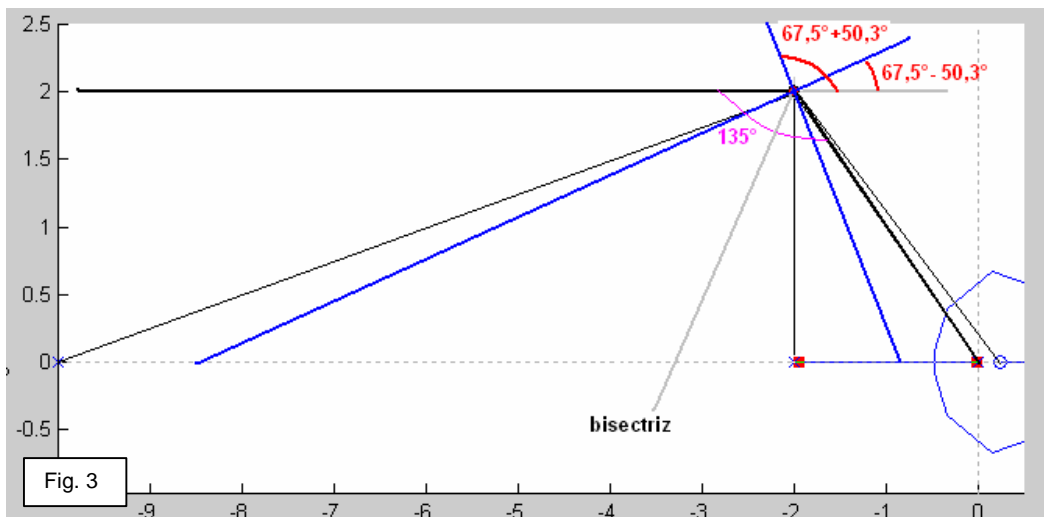
- El cero aporta $138,37^\circ$ (ver anexo)
- El polo en el origen -135°
- El polo en -2 agrega -90°
- El polo en -10 agrega $-14,036^\circ$

Esto da un total de $-100,67^\circ$

Con lo cual el compensador debe aportar $+100,67^\circ$ -no debe olvidarse que la condición de fase ahora es 0° y estamos trabajando con el LR complementario.



Dado que se pide que la ganancia del controlador sea mínima, se emplea el método de la bisectriz. En la figura 3 se puede observar que el ángulo entre la recta horizontal y la que une la ubicación del polo deseado con el origen forma 135° . Mientras no se supere ese valor, se puede utilizar un único par polo/cero. Caso contrario debe utilizarse un compensador con múltiples celdas polo-cero.



Gráficamente se puede deducir que las rectas que pasan por el punto $-2+j2$ y conforman un ángulo de $50,335^\circ$ ($=100,67^\circ/2$) con la recta bisectriz, presentan ángulos con la recta horizontal dados por:

$$67,5^\circ - 50,335^\circ = 17,165^\circ \quad y$$

$$67,5^\circ + 50,335^\circ = 117,835^\circ$$

$$\operatorname{tg}(17,165^\circ) = \frac{y - 2}{x + 2}$$

Luego, dichas rectas aceptan las siguientes expresiones analíticas:

$$\operatorname{tg}(117,835^\circ) = \frac{y - 2}{x + 2}$$

La intersección de estas rectas con el eje de abscisas se produce en:

$$X_p = -8,47 \text{ (polo del compensador)}$$

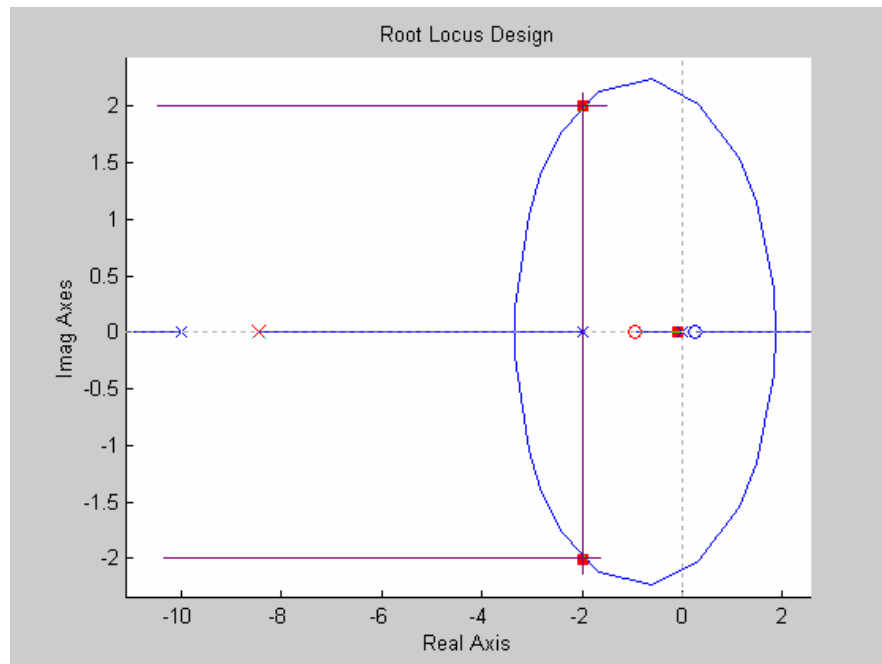
$$X_z = -0,94 \text{ (cero del compensador)}$$

Así, la expresión del compensador resulta: $G_c(s) = k \frac{(s + 0,94)}{(s + 8,47)}$

Falta determinar la ganancia para que los polos de lazo cerrado se posicionen sobre los puntos deseados. Para ello se plantea que la ganancia del sistema sobre los puntos especificados sea unitaria, es decir:

$$|GHG_c| = \left| \frac{-0,4 \cdot (s - 0,25)}{s \cdot (s + 2)(s + 10)} \times k \frac{(s + 0,94)}{(s + 8,47)} \right|_{-2+j2} = 1$$

De esta ecuación se obtiene que $k = 116$.



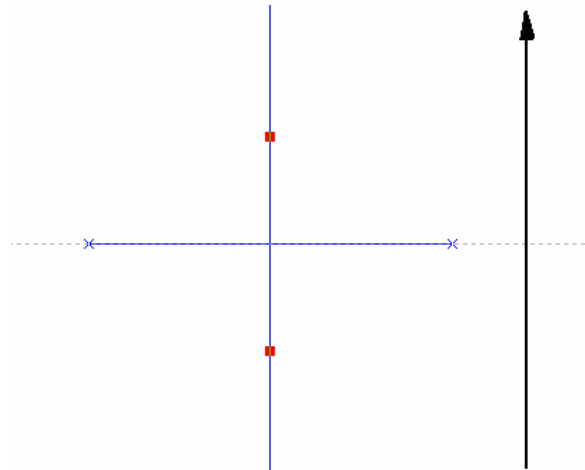
Anexo: aporte angular de una singularidad de no mínima fase en el lugar geométrico de raíces.

En el ejercicio que se acaba de desarrollar se observa que, el ángulo correspondiente al cero de NMF se ha medido desde el eje real positivo como cualquiera de los demás ángulos, y el valor obtenido se lo ha considerado positivo como cualquier cero de fase mínima. Habitualmente se presenta alguna confusión con los ángulos tomados en los diagramas de lugar de raíces y el aporte en frecuencia (Bode) de singularidades de NMF. Sin embargo, a pesar de lo que podría suponerse, no existen dos formas diferentes de medir los ángulos de acuerdo al método que se utilice. Simplemente lo que sucede es que la escritura de singularidades de NMF en el formato de Bode puede (de acuerdo a como esté escrita esa singularidad) sacar un signo negativo como factor común. Este signo no se tiene en cuenta en la conformación de los ángulos de las singularidades del LR, ya que aparece en la condición de fase a cumplir (0° o 180°).

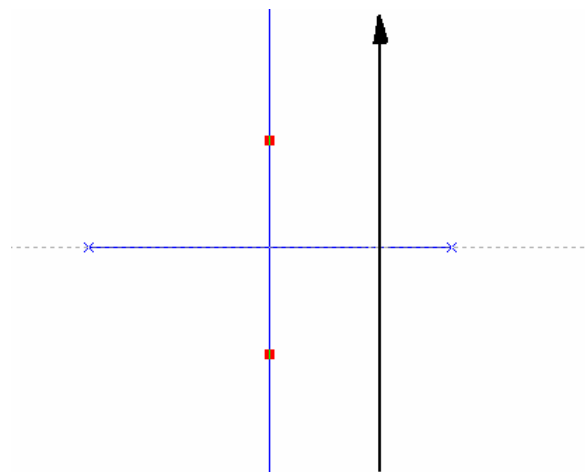
A fin de ejemplificar el procedimiento de medición de ángulos se presentan algunos ejemplos sencillos:

Ejemplo 1:

Un lugar de raíces clásico es el que representa una transferencia que posee sólo un par de polos por todo conjunto de singularidades.

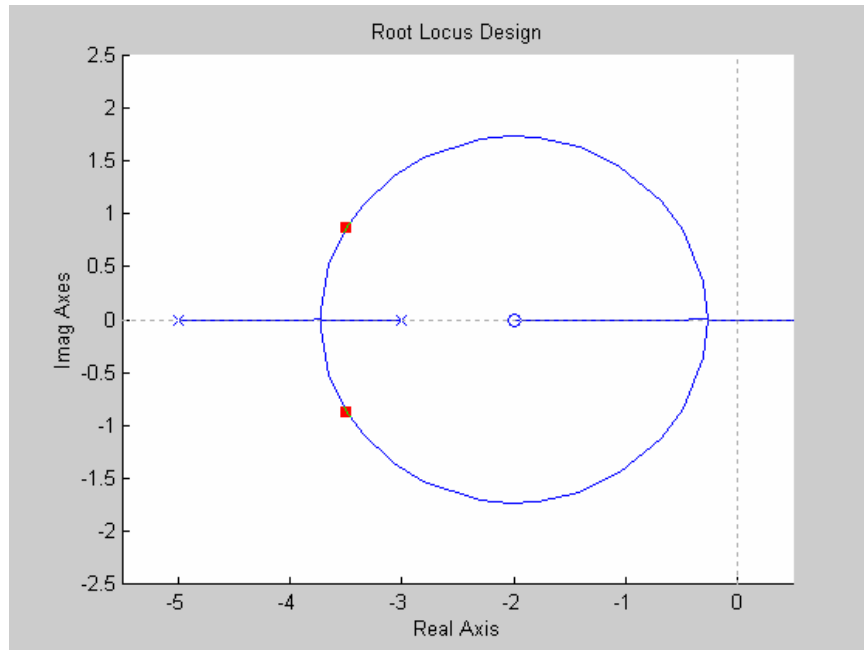


¿Qué sucedería si uno de estos polos fuera de no mínima fase? Efectivamente el LR no cambia su forma, sólo su posición relativa al eje:



Ejemplo 2:

Supongamos ahora un sistema realimentado positivamente con un único cero y un par de polos, todos en el SPI.



¿Qué sucedería ahora si el cero presente en el sistema fuera de fase no mínima? Si corremos el eje $j\omega$ hasta dejar al cero en el SPD manteniendo la posición relativa entre todas las singularidades: el LR no cambia en su forma.

Conclusión:

En estos dos ejemplos vemos que no hay que hacer ningún ajuste en cuanto al aporte de fase de las singularidades cuando alguna de ellas pasa a estar en el semiplano derecho. El aporte relativo al LR sigue siendo el mismo, aunque si quisiéramos escribir la transferencia que le da origen habría que tener cierto cuidado en la escritura de las singularidades de NMF.

Corolario:

Si se trata de ver cuanto aporta una singularidad en algún punto del plano s se computarán (medidos contra el eje real positivo) con signo positivo el aporte de los ceros, sean de fase mínima o no, y con signo negativo el de los polos, sean de fase mínima o no.

El signo positivo de los ceros es simplemente por estar en el numerador de la transferencia de modo similar que signo negativo de los polos por estar en el denominador.

Precauciones y advertencias:

Si debido a la aparición de una singularidad de no mínima fase, y al escribir la transferencia en el formato apropiado para el LR, aparece un signo menos, inmediatamente el sistema pasa a ser de realimentación positiva y el lugar de raíces dibujado es el complementario junto con la condición de ángulo igual a Cero.

Esto no cambia en absoluto lo detallado en el corolario. Vale la pena resaltar que la aparición del signo menos TAMPOCO altera el modo en que se computan los aportes de fase de las singularidades.